Inngangur að tvinntölum

eftir Harald Auðunsson

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$$

$$z = 3 - i2$$

$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1 - i2)\cdot(x - 1 + i2)$$

Ágúst 2000.

Inngangur að tvinntölum

eftir Harald Auðunsson

Efnisyfirlit

Inngangur að tvinntölum

1. INNGANGUR

Við byrjum á <u>svolítilli upprifjun</u>. Almenn lausn á annars stigs jöfnunni $ax^2 + bx + c = 0$ er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ef $b^2 - 4ac > 0$ þá eru til tvær rauntölulausnir,
ef $b^2 - 4ac = 0$ þá er til ein rauntölulausn og
ef $b^2 - 4ac < 0$ þá er ekki til rauntölulausn á jöfnunni.

Dæmi: Lausnir á $x^2 - 2x - 3 = 0$ eru $x = 3$ og $x = -1$ (tvær aðskildar lausnir).
Lausnir á $x^2 - 2x + 1 = 0$ eru $x = 1$ og $x = 1$ (lausnin er tvítekin).
Lausnir á $x^2 - 2x + 2 = 0$ eru ekki rauntölur.

Tvinntölur komu fyrst fram á 16. öld þegar verið var að leysa jöfnur eins og $x^2 - 10x + 40 = 0$. Þegar þessi jafna er leyst þá kemur fram mínustala undir rótarmerki í lausninni - samanber lausnina hér í byrjun. Á þeim tíma voru skiptar skoðanir meðal stærðfræðinga um mínustölur og hvað þær merktu, hvað þá merkingu rótar mínustölu !
Til gamans um vangaveltur stærðfræðinga á þessum tíma, og kvalir margra þeirra við tilhugsunina um mínustölur, má nefna eftirfarandi. Samkvæmt reiknireglum um mínustölur þá er $^{-1}/1 = {}^{1}/{-1}$ og okkur finnst ekkert eðlilegra í dag. Þessa jöfnu má einnig orða svo: minni tala deild með stærri tölu er jafnt og stærri tala deild með minni tölu ! Þetta gengur ekki upp sögðu einhverjir stærðfræðingar .... og til að hrella þá enn frekar þá komu frumkvöðlar fram með hugmyndir um rætur af þessum vandræða mínustölum !

Þegar mínustala birtist undir rótinni í almennu lausninni á 2. stigs jöfnu, þá höfum við hingað til einfaldlega afgreitt þennan möguleika með því að segja að engin lausn væri til, að minnsta kosti ekki nein rauntölulausn. Það væri „notalegt" ef við gætum á einhvern hátt sett fram formlega lausn á þessari jöfnu þó ekki sé alveg ljóst hvað sú lausn merkir. Sú tilraun gæti jafnvel gefið af sér eitthvað nýtt - eins og t.d. útvíkkun talnakerfisins. Útvíkkunin gæti síðan leitt af sér nýjar hugmyndir og aðferðir í stærðfræðinni - eins og hefur reyndar gerst ! Hver veit nema að einnig sé hægt að nýta þessar nýju hugmyndir við lausn hagnýtra, eða áþreifanlegra, verkefna.

Við skulum leysa jöfnuna $x^2 - 10x + 40 = 0$ á hefðbundinn hátt (prófið einnig að beita almennu lausninni hér í byrjun). Þar sem $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$, þá fæst $x^2 - 10x + 40 = (x - 5)^2 - 25 + 40 = (x - 5)^2 + 15$ og upphaflegu jöfnuna má því umrita sem $(x - 5)^2 + 15 = 0$. Eftir þessa umritun er auðvelt að einangra x:

$$(x - 5)^2 + 15 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 5)^2 = -15$$
$$\Rightarrow x - 5 = \pm\sqrt{-15}$$
$$\Rightarrow x = 5 \pm\sqrt{-15}.$$

Lausnirnar eru því tvær, $x = 5 + \sqrt{-15}$ og $x = 5 - \sqrt{-15}$.

Þetta eru formlegar lausnir og eins og við þekkjum þá er ekki hægt að taka rót af mínustölu, a.m.k. er ekki til rauntala sem margfölduð með sjálfri sér gefur mínustölu. Núna skulum við útvíkka talnamengi okkar og skilgreina nýjar tölur þar sem rætur af mínustölum eru mögulegar. Við innleiðum $\sqrt{-1}$ og þá einfaldast útreikningar, hvað svo sem $\sqrt{-1}$ merkir! Lausnina hér að framan má því umrita:

$$x = 5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{15}.$$

„Fyrirbærið" $\sqrt{-1}$ er oftast táknað með i og stendur i fyrir ímynduð tala (imaginary). Með þessu táknmáli má því rita lausnina sem $x = 5 \pm i\cdot\sqrt{15}$, eða $5 + i\cdot\sqrt{15}$ og $5 - i\cdot\sqrt{15}$, sem eru þá formlegar lausnir á jöfnunni $x^2 - 10x + 40 = 0$.

Þar sem $i = \sqrt{-1}$, þá er $i^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -1$. Við höfum því innleitt „tölu" sem í öðru veldi er mínustala. Þessar samsettu tölur eins og $5 + i\cdot\sqrt{15}$ eru nefndar **tvinntölur**. Eftir þessa útvíkkun talnakerfisins þá getum við hér eftir sagt að 2. stigs jafna hafi alltaf tvær lausnir.

Dæmi: Lausnir á $x^2 + 1 = 0$ eru $x = i$ og $x = -i$.

Dæmi: Lausnir á $x^2 - 2x + 2 = 0$ eru $x = 1 + i$ og $x = 1 - i$. Þessar lausnir má finna með því að beita almennu lausninni fyrir 2. stigs jöfnu sem nefnd var í upphafi kaflans.

Skilgreining tvinntalna.

Tvinntala er sú tala $z = x + i \cdot y$ þar sem x og y eru rauntölur og $i^2 = -1$. x er nefnt raunhluti z og y er nefnt þverhluti z. Ef þverhluti tvinntölu er núll þá höfum við rauntölu, en ef raunhlutinn er núll þá fáum við þvertölu. Mengi tvinntalna er táknað með **C**.

Dæmi: $z = 7 - i \cdot 3$. Hér er 7 raunhluti og -3 þverhluti tvinntölunnar.

Höfuðsetning algebrunnar.

Svolítil upprifjun. Talan x_o er sögð rót (núllstöð) margliðunnar P(x) ef $P(x_o) = 0$. Ennfremur, þá gengur þátturinn $(x - x_o)$ upp í margliðuna P(x) þá og því aðeins að x_o sé rót P(x).

Dæmi: Tölurnar 1 og -2 eru rætur margliðunnar $P(x) = x^2 + x - 2$. Þess vegna er hægt að umrita $x^2 + x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 2)$. Á sama hátt, þar sem 1, -1 og -2 eru rætur margliðunnar $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$, þá er $f(x) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2)$.

Höfuðsetning algebrunnar segir að sérhver margliða af stigi n hefur nákvæmlega n tvinntölurætur - einhverjar eða allar geta verið rauntölur. Samkvæmt þessari setningu þá má þátta allar margliður á eftirfarandi hátt:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 \cdot z + a_o \\ &= a_n \cdot (z - z_n) \cdot (z - z_{n-1}) \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot (z - z_1). \end{aligned}$$

Ennfremur, ef stuðlar margliðunnar eru rauntölur og ef $z = x + iy$ er rót, þá er $z = x - iy$ einnig rót (samokatalan).

Dæmi:

margliða	*stig margliðu*	*fjöldi lausna*	*lausnir og þáttun*
$2x + 6 = 0$	1. stigs	ein	$2x + 6 = 2 \cdot (x + 3)$
$x^2 + x - 2 = 0$	2. stigs	tvær	$x^2 + x - 2 = (x - 2)(x + 1)$
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$	3. stigs	þrjár	$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$
$x^2 - 2x + 2 = 0$	2. stigs	tvær	$x^2 - 2x + 2 = (x - 1 + i)(x - 1 - i)$
$x^2 - 10x + 40 = 0$	2. stigs	tvær	$x^2 - 10x + 40 = (x - 5 - i\sqrt{15})(x - 5 + i\sqrt{15})$
$x^2 + 4 = 0$	2. stigs	tvær	$x^2 + 4 = (x - i2)(x + i2)$.

Margliðurnar geta einnig haft tvinntölustuðla: lausnir $x^3 + (1-i) \cdot x^2 - (2+i) \cdot x + i2 = 0$ eru 2, -1 og i, þannig að $x^3 + (1-i)x^2 - (2+i)x + i2 = (x - 2)(x + 1)(x - i)$.

Útvíkkun talnamengja.

Það má hugsa sér að talnamengin hafi þróast út frá lausnum á jöfnum algebrunnar - þegar leystar voru flóknari og flóknari jöfnur urðu talnamengin einnig „flóknari“. Eftirfarandi tafla gefur hugmynd um þessa þróun:

jafna	*lausnir*	*talnamengi*	
$x - 7 = 0$	$x = 7$	náttúrulegar tölur	$\{ 1, 2, 3, 4, ... \}$
$x + 7 = 0$	$x = -7$	heilar tölur	$\{ ... -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$
$x \cdot 7 = 3$	$x = \frac{3}{7}$	ræðar tölur	$\{ \frac{p}{q}$, p og q eru heilar tölur og $q \neq 0 \}$ til dæmis $\{ ... 3, \frac{4}{5}, -7, \frac{347}{13}, ... \}$
$x^2 = 7$	$x = \pm\sqrt{7}$	torræðar tölur	{ allar tölur sem ekki eru ræðar tölur} til dæmis $\{ ... \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, ... \}$
		rauntölur	{ allar ræðar og torræðar tölur } til dæmis $\{ ... -19, 0, \frac{4}{5}, \sqrt{3}, \pi, 7, ... \}$
$x^2 - 2x + 2 = 0$	$x = 1 \pm i2$	tvinntölur	$\{ x + iy$, x og y eru rauntölur og $i^2 = -1 \}$ til dæmis $\{ ... -i, 1 + i2, 7, 7 - i3, ...\}$

Líta má á **rauntölu sem punkt á talnalínunni** (t.d. á x-ásnum). Hins vegar, þá má líta á **tvinntölu sem punkt í plani** (raunhlutinn er þá á x-ásnum og þverhlutinn á y-ásnum).

Hvernig geta orðið til jöfnur sem hafa tvinntölulausnir ?

Í byrjun kaflans leituðum við að lausn jöfnunnar $x^2 - 10x + 40 = 0$. Þessi tiltekna jafna kemur fram þegar við ætlum að finna stærð rétthyrnings þar sem lengd einnar hliðar er mismunurinn á tíu og lengd annarar hliðar, og flatarmál rétthyrningsins er fjörtíu. Á táknmáli algebrunnar verður jafnan: $x \cdot (10-x) = 40$. Formleg lausn jöfnunnar er $x = 5 \pm\sqrt{-15}$, en þetta er stærð sem við teljum óraunhæfa. Það að lausnin er óraunhæf þýðir einfaldlega að það er ekki til rétthyrningur sem fullnægir skilyrðunum sem við settum fram í byrjun.

2. REIKNIAÐGERÐIR

Reikniaðgerðirnar samlagning, margföldun og deiling eru svipaðar fyrir tvinntölur og fyrir rauntölur. Það má segja, að eini munurinn sé sá, að í stað i^2 getum við sett -1.

Smá skilgreining. Ef $z = x + iy$, þá er **samokatala** z skilgreind sem $z = x - iy$. Samokatala z er oft táknuð með $\bar{z}$, og því er $\overline{x + iy} = x - iy$. Ef $z = -2 - i\cdot 45$, þá er $\bar{z} = -2 + i\cdot 45$.

Jafnar tölur. Tvær tvinntölur eru sagðar jafnar ef bæði raun- og þverhlutar þeirra eru jafnir.

Dæmi: Ef $z_1 = 3 + i2$, $z_2 = 3 + i4$ og $z_3 = 3 + i4$,
þá er $z_1 \neq z_2$ og $z_2 = z_3$.

Samlagning. Þegar tvær tvinntölur eru lagðar saman þá eru raunhlutarnir lagðir saman annars vegar og þverhlutarnir hins vegar.

Dæmi: Ef $z_1 = 1 + i2$ og $z_2 = 3 + i4$,
þá er $z_1 + z_2 = (1 + i2) + (3 + i4) = 1{+}3 + i2{+}i4 = 4 + i6$
og $z_1 - z_2 = (1 + i2) - (3 + i4) = 1{-}3 + i2{-}i4 = -2 - i2$.

Margföldun. Það er heppilegt að innleiða margföldunina með dæmi.

Dæmi: Ef $z_1 = 1 + i2$ og $z_2 = 3 + i4$,
þá er $z_1 \cdot z_2$
$= (1 + i2)\cdot(3 + i4) = 1\cdot 3 + 1\cdot i4 + i2\cdot 3 + i2\cdot i4$ („venjuleg" algebra)
$= 3 + i10 + i^2 8 = 3 + i10 - 1\cdot 8$ (notum $i^2 = -1$)
$= -5 + i10$.

Deiling. Það er heppilegt að innleiða deilinguna með dæmi.

Dæmi: Ef $z_1 = 1 + i2$ og $z_2 = 3 + i4$,
þá er $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i2}{3 + i4}$.
Við viljum tákna þetta hlutfall með einni tvinntölu (x + iy):
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i2}{3 + i4} = x + iy$.
Til þess að losna við tvinntölu úr nefnaranum þá lengjum við brotið þannig að við fáum rauntölu í nefnarann (lengjum með samokatölu nefnarans):

$$\frac{1 + i2}{3 + i4} = \frac{(1 + i2)\cdot(3 - i4)}{(3 + i4)\cdot(3 - i4)} = \frac{11 + i2}{25} = \frac{11}{25} + i\cdot\frac{2}{25}.$$

Dæmi: a) Ef $z = x + iy$, þá er $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ b) $(2 - i3) \cdot i = 3 + i2$

c) $(1 + i)(1 - i) = 2$ d) $i^3 = -i$ e) $(1 + i)^2 = i2$

f) $\frac{3 + i2}{i} = 2 - i3$ g) $\frac{i8}{1 + i} = 4 + i4$ h) $\frac{1 - i}{1 + i} = -i$.

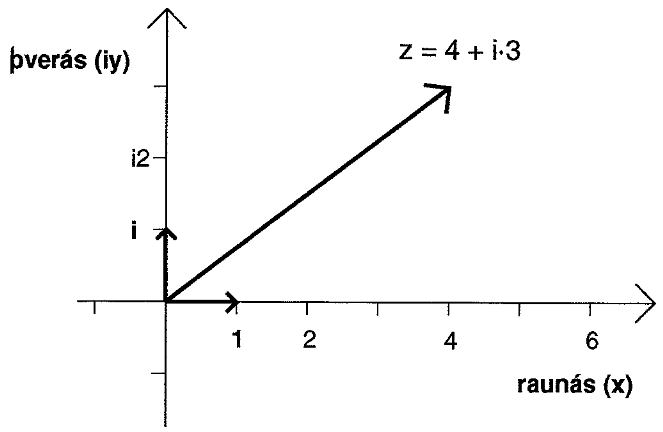
Samantekt á reikniaðgerðunum:

- Ef $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$, þá er $x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$.
- Ef $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, þá er $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$.
- Ef $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, þá er $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$.
- Ef $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, þá er $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

3. MYNDRÆN FRAMSETNING

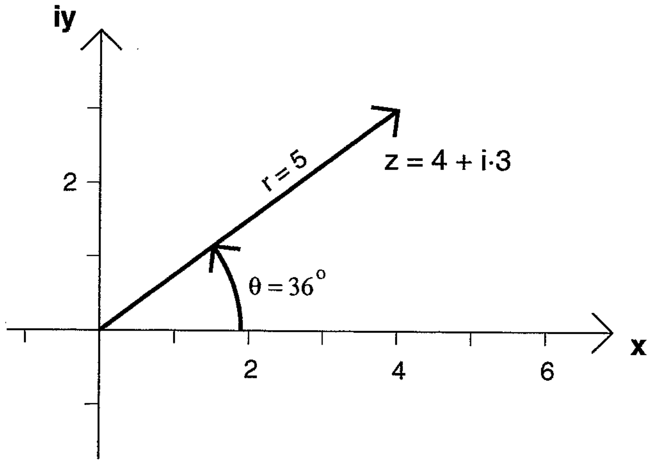
Oft er heppilegt að líta á tvinntölu sem punkt í plani eða sem vektor. Planið er þá nefnt **tvinntöluplanið**.

Kartesísk hnit. Þegar tvinntalan $z = x + iy$ er táknuð sem punktur í plani þá verða hnit punktsins (x, y). Hér má einnig líta á $z = x + iy$ sem vektor með endapunktinn (x, y) og uppaf í $(0, 0)$.



Ásar hnitakerfisins eru nefndir **raunás**, fyrir x, og **þverás**, fyrir y. Myndir af þessu tagi eru oft nefndar **Argand-myndir**.

Pólhnit. Þegar litið er á tvinntöluna $z = x + iy$ sem punkt í planinu þá má einnig tilgreina tvinntöluna með pólhnitum. Þá er fjarlægð punktsins frá miðju hnitakerfisins táknuð með $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ og stefnuhornið til punktsins, mælt rangsælis frá x-ás, með $\theta = \operatorname{atan}(\frac{y}{x})$.



4. PÓLFORM

Myndræna framsetningin hér að framan gefur til kynna tvær framsetningar á tvinntölum, **rétthyrnt form** og **pólform**. Við sáum rétthyrnda formið hér að framan, s.s. $z = x + iy$. Með pólhnitin í huga má rita

$$z = x + iy = r \cdot \cos(\theta) + i \cdot r \cdot \sin(\theta) = r \cdot [\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)].$$

Hér er r lengd vektorsins, nefnt **tölugildi** tvinntölunnar, og θ er stefnuhorn vektorsins, nefnt **horngildi** tvinntölunnar. Til þæginda er eftirfarandi ritháttur oft notaður:

$$\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta) = \operatorname{cis}(\theta) \text{ og þá fæst } z = r \cdot \operatorname{cis}(\theta).$$

Ennfremur, þá er tölugildi z ósjaldan táknað með mod(z) eða $|z|$ og horngildið með arg(z). Raunhluti $z = x + iy$ er oft táknaður með $\operatorname{Re}(z) = x$ og þverhlutinn með $\operatorname{Im}(z) = y$.

Dæmi: Ef $z = 3 + i4$, þá er tölugildi $z = \operatorname{mod}(z) = 5$ og horngildi $z = \arg(z) = 53{,}13°$.

5. MARGFÖLDUN OG DEILING

Þegar tvinntölur eru lagðar saman þá er yfirleitt heppilegra að nota hornrétta formið, en við margföldun eða deilingu tvinntalna þá er pólformið oft hentugra. Við útleiðsluna hér að neðan þarf að styðjast við reglur um umskrift hornafalla („summuformúlurnar“).

Margföldun:

$$\begin{aligned}
& z_1 \cdot z_2 \\
&= r_1 \cdot \mathrm{cis}(\theta_1) \cdot r_2 \cdot \mathrm{cis}(\theta_2) \\
&= r_1 \cdot [\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1)] \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)] \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + i \cdot \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + i^2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2)] \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2) + i \cdot (\cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2))] \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot \mathrm{cis}(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

Af þessu má sjá að líta má á margföldun tvinntalna sem snúning rangsælis. Í stuttu máli má segja, að við margföldun séu lengdir margfaldaðar saman og stefnuhornin lögð saman. Á sama hátt fæst: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + i \cdot \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]$.

Dæmi: Ef $z_1 = 2 \cdot \mathrm{cis}(\pi/2)$ og $z_2 = 3 \cdot \mathrm{cis}(\pi/4)$, þá er $z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot \mathrm{cis}(3\pi/4)$.
Ef $z = 4 + i3$, þá er $z \cdot i = -3 + i4$ (snúningur rangsælis um 90°).

Deiling:

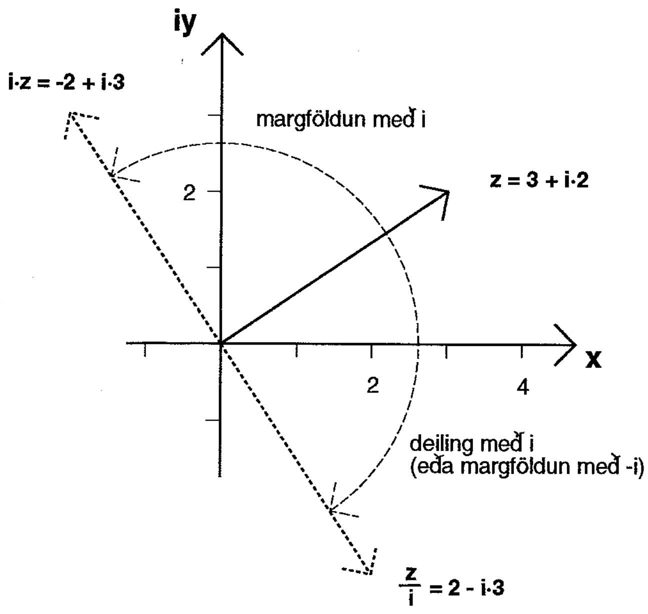
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} \cdot \mathrm{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

Þannig má líta á deilingu sem snúning réttsælis. Þessa jöfnu má rökstyðja á svipaðan hátt og gert var hér að framan um margföldunina.

Dæmi: Ef $z_1 = 2 \cdot \mathrm{cis}(\pi/2)$ og $z_2 = 3 \cdot \mathrm{cis}(\pi/4)$, þá er $\frac{z_1}{z_2} = 2/3 \cdot \mathrm{cis}(\pi/4)$.

Dæmi: Ef $z_1 = 3 \cdot \mathrm{cis}(40°)$ og $z_2 = 6 \cdot \mathrm{cis}(30°)$
þá er $z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 6 \cdot \mathrm{cis}(40° + 30°) = 18 \cdot \mathrm{cis}(70°)$
og $\frac{z_2}{z_1} = 6/3 \cdot \mathrm{cis}(30° - 40°) = 2 \cdot \mathrm{cis}(-10°)$.

Dæmi: **Snúningur tvinntölnu með margföldun.** Gefum okkur að $z = 3 + i\cdot 2$. Ef við margföldum þessa tvinntölu með i þá veldur það snúningi um hornið 90° rangsælis, eins og sést á myndinni hér fyrir neðan ($i\cdot z = -2 + i\cdot 3$). Hins vegar, ef við deilum í áðurnefnda tvinntölu með i þá veldur það snúningi um 90° réttsælis, samanber myndina ($z/i = 2 - i\cdot 3$).



Þetta eru almennar reglur: **margföldun tvinntölu með i veldur alltaf snúningi tölunnar um 90° rangsælis** og deiling tvinntölu með i veldur alltaf snúningi réttsælis um 90° (nema að talan sé núll, að sjálfsögðu). Það er vert að taka eftir því að deila með i er jafngilt og að margfalda með -i. Vegna snúningsins sem margföldun með i veldur, ætti að vera ljóst að tvinntölurnar z og i·z eru alltaf hornréttar (en þá lítum við á tölurnar sem vektora).

Hagnýting tvinntalna. Þessir eiginleikar tvinntölu, að líta má á hana sem vektor í plani og að margföldun getur valdið snúningi, gerir tvinntölur oft heppilegar í reikningum í eðlisfræði, tæknifræði, verkfræði og stærðfræði - reikningarnir geta orðið einfaldari. Einnig er þá nýttur sá eiginleiki að tölurnar z og i·z eru alltaf hornréttar (nema z sé jafnt og núll).

6. JAFNA EULERS

Skilgreining. Jafna Euler er $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\cdot\sin(\theta)$.

Jafna Eulers er „furðuleg“ við fyrstu sýn. Við höfum kynnst því að veldisfallið e^x sé jafnt vaxandi fall, en samkvæmt þessari skilgreiningu þá er það lotubundið, líkt og hornaföllin. Stundum er jafna Eulers sett fram sem skilgreining á veldisfallinu þegar veldið er hrein þvertala, eins og gert er hér á undan. Þessa jöfnu má þó réttlæta m.a. á eftirfarandi hátt.

Við byrjum á <u>svolítilli upprifjun</u>: hægt er að setja fram eftirfarandi föll sem veldisraðir þar sem x er rauntala (athugið að hér er x mælt í radíönum):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Prófum nú að setja þvertölu í stað rauntölunnar í röð veldisfallsins:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\cdot\frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + i\cdot(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) \\ &= \cos(x) + i\cdot\sin(x) = \mathrm{cis}(x) \end{aligned}$$

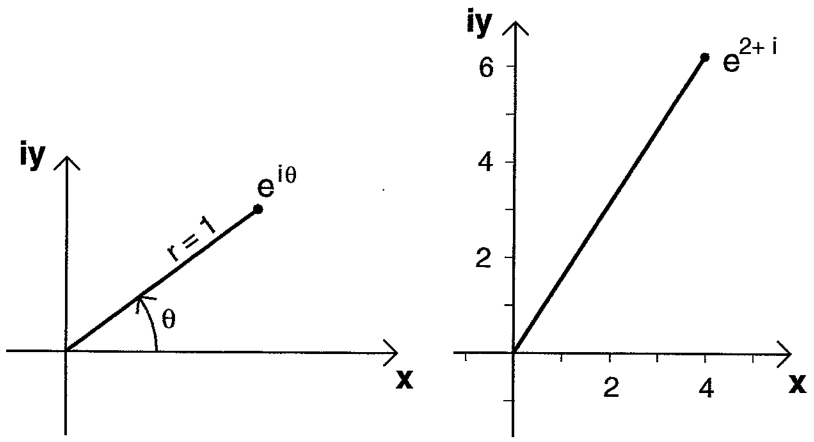
Samkvæmt skilgreiningunni þá er eðlilegt að líta á x sem horn (oft táknað með θ). Lengd $e^{i\theta}$ er 1 fyrir öll gildi á θ og því gefur $e^{i\theta}$ til kynna stefnu í tvinntöluplaninu. Það er því næsta eðlilegt að skilgreina veldisfallið af tvinntölu á eftirfarandi hátt:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy} = e^x\cdot(\cos(y) + i\cdot\sin(y)) = e^x\cdot\mathrm{cis}(y).$$

Munið, að samkvæmt skilgreiningunni á e^{ix} þá er $e^{ix} = \mathrm{cis}(x)$.

Dæmi: $e^{2+i} = e^2 \cdot e^i = e^2 \cdot \text{cis}(1) \approx 7{,}39 \cdot \text{cis}(57.3^\circ) \approx 3{,}99 + i \cdot 6{,}22.$

Dæmi: $e^{i3} = \text{cis}(3) \approx -0{,}990 + i \cdot 0{,}141.$



Skemmtileg jafna! Með ofangreindar skilgreiningar í huga er hægt að rökstyðja eina af frægari og skemmtilegri jöfnum stærðfræðinnar:

$$\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0.}$$

Í þessari einu jöfnu eru saman komnar grundvallarstærðirnar 0, 1, e, π og i.

7. RÆTUR TVINNTALNA

Kvaðratrætur tvinntalna. Jafnan $z^2 = x + iy = r \cdot \text{cis}(\theta)$ hefur lausnirnar

$$z = \pm\sqrt{r \cdot \text{cis}(\theta)} = \pm\sqrt{r \cdot e^{i\theta}} = \pm\sqrt{r} \cdot e^{i\theta/2} = \pm\sqrt{r} \cdot \text{cis}(\tfrac{\theta}{2}).$$

Dæmi: Leysa á jöfnuna $z^2 = 3 + i4$. Hér er $r = |3 + i4| = 5$ og $\theta = \text{atan}(4/3) = 53{,}13^\circ$. Því eru lausnirnar $\pm\sqrt{5} \cdot \text{cis}(26{,}57^\circ)$. Á rétthyrndu formi eru þær $2+i$ og $-2-i$.

Dæmi: Finna á kvaðratrótna af $-i2$. Hér er $-i2 = 2 \cdot \text{cis}(270^\circ)$ og því fæst $\sqrt{-i2} = \pm\sqrt{2} \cdot \text{cis}(135^\circ) = \pm(-1+i)$. Ræturnar eru tvær: $-1 + i$ og $1 - i$.

Lausn 2. stigs jöfnu. Almenn lausn jöfnunnar $az^2 + bz + c = 0$ þar sem stuðlarnir eru tvinntölur hefur sama formið og þegar stuðlarnir eru allir rauntölur - samanber upprifjunina í byrjun (sama útleiðsla).

Dæmi: Leysa á jöfnuna $x^2 + 2x + 5 = 0$. Almenna lausnin er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm i4}{2}$$

eða $x = -1 - i2$ og $x = -1 + i2$.

Dæmi: Finna á allar rætur jöfnunnar $z^2 + (1+i)\cdot z + i = 0$.

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{-1 - i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4\cdot 1\cdot i}}{2}$$

$$= \frac{-1-i \pm \sqrt{-i2}}{2} = \frac{-1-i \pm (-1+i)}{2} \quad \text{eða } z = -1 \text{ og } z = -i.$$

Rætur tvinntölu. Þegar finna á rót tvinntölu þá er heppilegast að rita hana fyrst á pólformi.
Sérhver tvinntala $z = r\cdot cis(\theta) = r\cdot e^{i\theta}$ og

$$z^n = (r\cdot e^{i\theta})^n = r^n\cdot e^{in\theta} = r^n\cdot cis(n\theta).$$

Verkefnið hér er að finna n-tu rótina af z, þ.e. $z^{1/n}$ og skulum við tákna þessa rót með $w = R\cdot e^{i\phi}$. Finna á $w = z^{1/n}$, en þá er

$$w^n = z$$
$$(R\cdot e^{i\phi})^n = r\cdot e^{i\theta}$$
$$R^n\cdot e^{in\phi} = r\cdot e^{i\theta}$$

Hér þarf að gilda fyrir lengdina $R^n = r$ og fyrir stefnuna $e^{in\phi} = e^{i\theta}$.

Fyrri jafnan gefur $R = r^{1/n}$ og sú seinni $n\phi = \theta + k\cdot 2\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...,$ s.s.

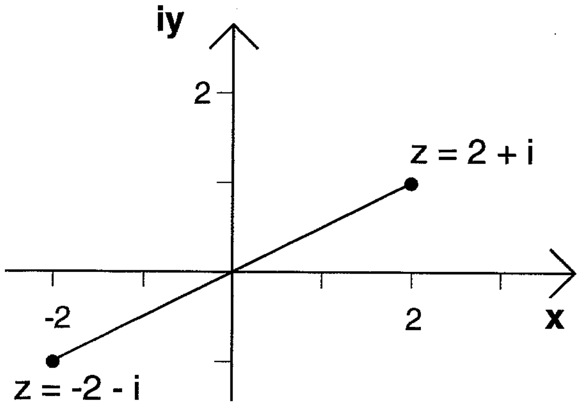
$$\phi = \frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, 3, ..., n - 1.$$

Það eru því n möguleikar fyrir gildið á k (þ.e. n rætur). Ef k = n eða hærra, þá eru lausnirnar endurteknar (k = n er jafngilt k = 0, k = n+1 er jafngilt k = 1 og svo framvegis). Athugið, að horngildin skipta einingarhringnum í jafna geira.

Í stuttu máli:

Ef $z = r\cdot cis(\theta)$, þá er $z^{1/n} = r^{1/n}\cdot cis(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n})$, þar sem $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$ (n-rætur).

Dæmi: Finna á $\sqrt{3 + i4}$. Við byrjum á að umrita töluna á pólform: $3 + i4 = 5\cdot\text{cis}(53{,}13°)$. Ef w er önnur rót tölunnar, þá gildir $w^2 = 5\cdot\text{cis}(53{,}13°)$, og ef $w = R\cdot\text{cis}(\phi)$, þá fæst $R^2\cdot\text{cis}(2\phi) = 5\cdot\text{cis}(53{,}13°)$. Þessi jafna gefur fyrir lengdina að $R^2 = 5$ og fyrir stefnuhornið $2\phi = 53.13° + k\cdot360°$, eða $R = \sqrt{5}$ og $\phi = 26{,}56° + k\cdot180°$, $k = 0$ og 1. Kvaðratræturnar af $3 + i4$ eru því tvær: $\sqrt{5}\cdot\text{cis}(26{,}56°)$ og $\sqrt{5}\cdot\text{cis}(206{,}56°)$. Ræturnar má einnig rita sem $2 + i$ og $-2 - i$. Finnið þessar rætur einnig með því að beita reglunni hér að framan um kvaðratrót tvinntölu. Myndin sýnir kvaðræturnar í tvinntöluplaninu.



Dæmi: Finna á þriðju rótina af $-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\text{cis}(\frac{3\pi}{4})$.

Hér er $w = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\text{cis}(\frac{3\pi}{4}))^{1/3}$ eða $w^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\text{cis}(\frac{3\pi}{4})$.

Notum $w = R\cdot\text{cis}(\phi)$ og þá fæst $R^3\cdot\text{cis}(3\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\text{cis}(\frac{3\pi}{4})$.

Nú verður að gilda að $R^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $3\phi = \frac{3\pi}{4} + k\cdot2\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Þegar þessar jöfnur eru leystar fyrir R og ϕ fæst:

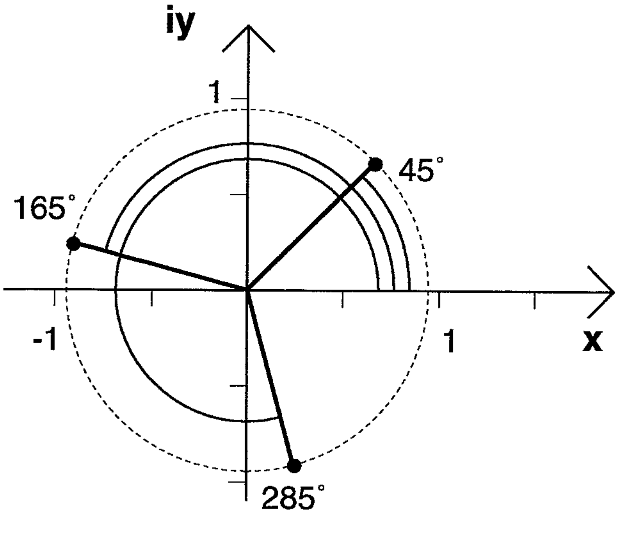
$R = (\frac{1}{2})^{1/6}$ og $\phi = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$, $k = 0$, 1 og 2. Ræturnar eru þrjár:

$$w = (\frac{1}{2})^{1/6}\cdot[\cos(\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2\pi}{3}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2\pi}{3})]\ ,\ k = 0,\ 1 \text{ og } 2$$

eða

$$w_1 = (\frac{1}{2})^{1/6}\cdot[\cos(\frac{\pi}{4}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{4})],$$
$$w_2 = (\frac{1}{2})^{1/6}\cdot[\cos(\frac{11\pi}{12}) + i\cdot\sin(\frac{11\pi}{12})] \text{ og}$$
$$w_3 = (\frac{1}{2})^{1/6}\cdot[\cos(\frac{19\pi}{12}) + i\cdot\sin(\frac{19\pi}{12})].$$

Eftirfarandi mynd sýnir lausnirnar þrjár í tvinntöluplaninu:



Dæmi: Leysum jöfnuna $z^3 = 1 + i$.
Setjum $z = R\cdot\text{cis}(\phi)$, en þá er $(R\cdot\text{cis}(\phi))^3 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}(45°)$.
Af þessu leiðir að $R = 2^{1/6}$ og $\phi = 15° + k\cdot120°$, $k = 0$, 1 og 2.
Lausnirnar eru þrjár, jafnt dreifðar (120° á milli) á hring með radíus $2^{1/6}$.

Á pólformi eru lausnirnar:
$z_1 = 2^{1/6}\cdot\text{cis}(15°)$, $z_2 = 2^{1/6}\cdot\text{cis}(135°)$ og $z_3 = 2^{1/6}\cdot\text{cis}(255°)$,
og á rétthyrndu formi eru þær:
$z_1 = 1{,}084 + i0{,}291$, $z_2 = -0{,}794 + i0{,}794$ og $z_3 = -0{,}291 - i1{,}084$.

8. DÆMASAFN

1. Einfaldið og skilið á rétthyrndu formi:

a) $(1 + i) + (7 + 5i)$ b) $(3 + i7) - (1 - i2)$

c) $4 \cdot (2 + i3)$ d) $3i \cdot (2 + i4)$

e) $(3 + i7) \cdot (1 - i2)$ f) $(-3 + i7) \cdot (-1 - i2)$

g) $20{,}3 - i0{,}9 + i13{,}2 - 17{,}7 + i3{,}1 \cdot 7 - i2{,}1 \cdot i9{,}0$

2. Einfaldið og skilið á rétthyrndu formi:

a) $\dfrac{12 + i4}{2}$ b) $\dfrac{2 + i3}{1 - i2}$ c) $\dfrac{6 + i8}{-i5}$.

3. Einfaldið og skilið á rétthyrndu formi:

a) i^4 b) $(2 + i3)^2$ c) $i^{12} - \dfrac{1}{i}$ d) $\dfrac{1}{i^2}$

4. Gefin er annars stigs jafnan $x^2 + 2x + 5 = 0$.

a) Finnið allar lausnir jöfnunnar.

b) Merkið lausnirnar inn á tvinntöluplanið (Argand-mynd).

c) Þáttið $x^2 + 2x + 5$.

5. Einfaldið og skilið á rétthyrndu formi:

a) $(3 + i6) \cdot (2 + i7)$ b) $\dfrac{9 + i12}{2 - i}$

6. Skrifið á rétthyrndu formi: a) $5 \cdot \mathrm{cis}(\pi/2)$ b) $17 \cdot \mathrm{cis}(\pi/7)$

c) $12 \cdot \mathrm{cis}(30°)$

7. Skrifið á pólformi: a) $3 + i2$ b) $3 - i4$

8. Reiknið $\dfrac{z_1 + z_2}{z_3}$ þar sem $z_1 = i$, $z_2 = 4 + i7$ og $z_3 = 2 - i2$.

Skrifið svarið á a) rétthyrndu formi b) pólformi.

9. Einfaldið: $\mathrm{Re}(3 - i8) + \mathrm{Im}(23 + i247) + \overline{3 + i} + |3 + i4|$.

10. Skrifið $(1 + i\sqrt{3})^5$ á forminu $x + iy$.

11. Finnið lausn á jöfnuhneppinu $2z_1 + 3z_2 = 4$ og $\frac{z_1}{z_2} = i$.

12. Merkið inn á tvinntöluplanið og ritið á pólformi:

a) $z = 4 + i3$ b) $z = -3 - i2$

c) $z = 1 + i$ d) $z = -2{,}784 + i\cdot 0{,}397$.

13. a) $\mathrm{mod}(-17 + i43)$ b) $\arg(245 - i729)$

c) $|3 - i9|$ d) $|(1 + i)(12 - 2i)|$

14. Leysið jöfnurnar:

a) $z^2 = -16$ b) $z^2 = 1 + i$ c) $z^2 = -i4$

15. Leysið jöfnurnar a) $z^2 - 4z + 8 = 0$

b) $z^2 + 4z + 6 = 0$

c) $x^2 + i2x + 3 = 0$.

16. a) Ákvarðið z þannig að $z + \frac{1}{z}$ sé rauntala.

b) Leysið jöfnuna $z^2 = 2\cdot\bar{z}$.

17. Leysið jöfnurnar: a) $z^4 = 1$ b) $z^5 = 1$ c) $z^3 = 3 - i4$

18. Komið á formið $x + iy$:

a) e^{2+i3} b) e^i c) $e^{i\pi}$.

19. Leysið jöfnurnar:

a) $e^z = 1$ b) $e^z = 2 + i3$

c) $e^z = i$ d) $e^{5z} = 4$.

20. a) Sýnið að $|\mathrm{cis}(\theta)| = 1$. b) Sýnið að $z\cdot\bar{z} = r^2$.

21. Sýnið að fyrir tvær tvinntölur z og w gildir að $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$.

22. Sýnið að fyrir tvær tvinntölur z og w gildir að $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

23. Sýnið að a) $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)$ b) $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \sin(x)$.

9. SVÖR

1. a) $8 + i6$ b) $2 + i9$
c) $8 + i12$ d) $-12 + i6$
e) $17 + i$ f) $17 - i$
g) $20{,}6 + i34{,}0$

2. a) $6 + i2$ b) $-{}^{4}/5 + i{}^{7}/5$ c) $-{}^{8}/5 + i{}^{6}/5$

3. a) 1 b) $-5 + i12$ c) $1 + i$ d) -1

4. a) $-1 \pm i2$ b) $(-1, 2)$ og $(-1, -2)$ c) $(x + 1 - i2)(x + 1 + i2)$

5. a) $-36 + i33$ b) ${}^{6}/5 + i{}^{33}/5$

6. a) $i5$ b) $15{,}32 + i\cdot 7{,}38$ c) $10{,}39 + i\cdot 6{,}00$

7. a) $\sqrt{13}\cdot\mathrm{cis}(33{,}69°)$ b) $5\cdot\mathrm{cis}(-53{,}13°)$

8. a) $-1 + i3$ b) $3{,}1623\cdot\mathrm{cis}(108{,}43°)$

9. $258 - i$

10. $32\cdot\mathrm{cis}(300°) = 16 - i16\sqrt{3}$.

11. $z_1 = {}^{8}/13 + i{}^{12}/13$ og $z_2 = {}^{12}/13 - i{}^{8}/13$.

12. a) $5\cdot\mathrm{cis}(36{,}87°)$ b) $\sqrt{13}\cdot\mathrm{cis}(213{,}69°)$
c) $\sqrt{2}\cdot\mathrm{cis}(45°)$ d) $2{,}812\cdot\mathrm{cis}(171{,}89°)$

13. a) $\sqrt{2138}$ b) $-71{,}42°$ c) $\sqrt{90}$ d) $\sqrt{296}$

14. a) $i4$ og $-i4$; eða $4\cdot\mathrm{cis}({}^{\pi}/2 + k\cdot\pi)$, $k = 0$ og 1
b) $2^{1/4}\cdot\mathrm{cis}({}^{\pi}/8 + k\cdot\pi)$, $k = 0$ og 1
c) $2\cdot\mathrm{cis}({}^{3\pi}/4 + k\cdot\pi)$, $k = 0$ og 1

15. a) $2 \pm i2$ b) $z = -2 \pm i\sqrt{2}$ c) $x = i$ og $x = -i3$

16. a) $y = 0$ eða $x^2 + y^2 = 1$
b) $y = 0, x = 0$ eða $y = 0, x = 2$ eða $x = -1$ og $y = \pm\sqrt{3}$

17. a) $1, i, -1$ og $-i$ eða $1\cdot\mathrm{cis}(k\cdot{}^{\pi}/2)$, $k = 0, 1, 2$ og 3
b) $\mathrm{cis}(k\cdot{}^{2\pi}/5)$, $k = 0, 1, 2, 3$ og 4
c) $5^{1/3}\cdot\mathrm{cis}(-17{,}71° + k\cdot 120°)$, $k = 0, 1$ og 2; eða ritað að fullu:
$z_{k=0} = 1{,}629 - i0{,}520$, $z_{k=1} = -0{,}364 + i1{,}671$ og $z_{k=2} = -1{,}265 - i1{,}151$.

18. a) $-7{,}315 + i\cdot 1{,}043$ b) $0{,}5403 + i\cdot 0{,}8415$ c) -1

19. a) $x = 0$ og $y = 0 + n\cdot 360°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $x = 1{,}386$ og $y = 0{,}9828$ rad
c) $x = 0$ og $y = 90° + n\cdot 360°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
d) $x = 0{,}2773$ og $y = 0$.